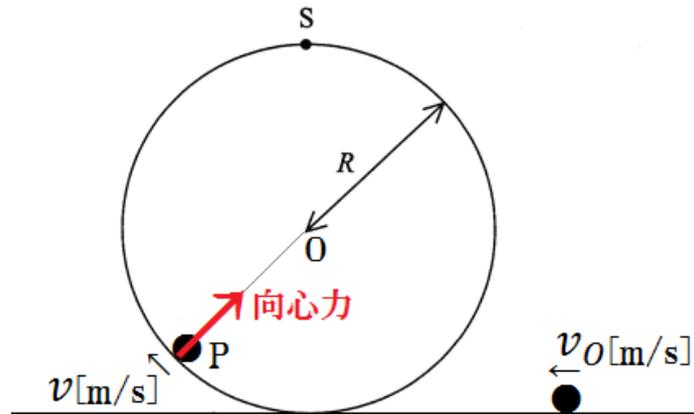


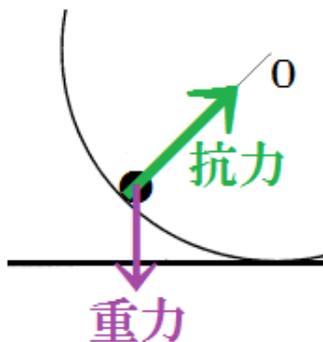
## 5. 円運動

物体の運動の様子が変わるのは、その物体に力がかかっているためである。物体が円の軌道を描きながら運動していれば、その物体には円軌道の中心に向かう力(向心力)が絶えずかかっている。すなわち円運動は加速度運動なのである。



例えば上図のように、質量 $m$ [kg]の小球が、半径 $R$ [m]の円筒の内壁に沿って鉛直面内で運動している場合を考える。水平面上での物体の速さを $v_0$ [m/s]、円筒の内壁上のある点 P での小球の速さを $v$ [m/s]とする。

小球がこの円筒の内壁を円運動できるのは、小球が円軌道から受ける抗力が常に円軌道の中心 O に向かってかかっているためである。



この向心力の大きさを $f$ [N]、辺 OP と O から床に下した垂線との角度を $\theta$ 、抗力の大きさを $N$ [N]とすると、この向心力は「抗力 $N$ [N]」と「重力の円筒面に対して垂直成分 $mg\cos\theta$ [N]」の合力に相当するため、以下の式が成り立つ(左図参照)。

$$f = N - mg\cos\theta$$

また、円運動は加速度運動であり、その加速度 $a$ [m/s<sup>2</sup>]は以下のように表される。

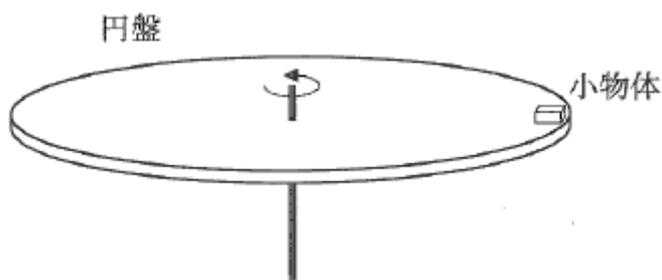
$$a = \frac{v^2}{r}$$

よって、向心力の大きさ $f$ [N]の式は以下のように変形することができる。

$$f = ma = m \frac{v^2}{r} = N - mg\cos\theta$$

【5-例】神戸大学 2012 第 1 問

下図のように地面に対して水平に一定の速さで回転する摩擦のある円盤の上に小物体が置かれている。重力加速度の大きさを  $g$  として、次の問いに答えなさい。



問 1 この円盤は 1 分間あたり 10 回転している。このときの周期と角速度、小物体の軌道上での速さを求めよ。ただし、小物体円盤の中心から  $R$  だけ離れており、円盤に対しては止まっているものとする。

- 「周期」 = 物体が一回転するのにかかる時間のこと。
- 「角速度」 = 回転する物体が単位時間あたりに刻む角度のこと。
- 「速さ」 = 単位時間当たりにおける物体の移動距離のこと。

問 2 円盤の角速度を徐々に増大させたところ、ある角速度  $\omega_0$  で小物体は円盤に対して動き始めた。円盤に対する小球の最大静止摩擦係数を  $\omega_0$  を用いて表せ。

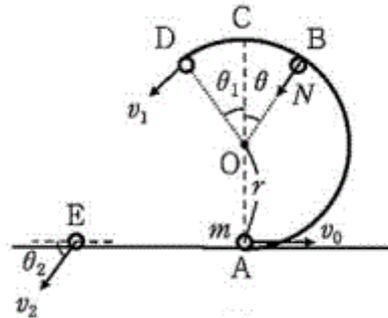
- 小物体が円盤に対して動いたので、観測者は円盤上に置いた方が良いでしょう。この場合、観測者から見たら小物体は回転していないので向心力は働かず、代わりに慣性力として「遠心力」がかかることに注意したい。小物体が円盤上を動く直前では何と何の力がつりあっている…？

問 3 小物体を元の位置に戻し、問 2 と同じことを円盤の回転軸を  $\theta$  だけ鉛直方向から傾けておこなった。この場合、小物体が動き始める時の角速度  $\omega_1$  は、円盤を傾けない場合での角速度  $\omega_0$  の何倍であるか答えよ。ただし円盤が止まっている場合、 $\theta$  は小物体が滑り落ちない範囲にあるものとする。

- 円盤を傾けることで、重力の「円盤の傾き方向の成分」が追加されることに注意する。問 2 と同様、力のつりあいを考えるべし。

【5-1】 芝浦工業大学 2 月 3 日 2014 第 2 問

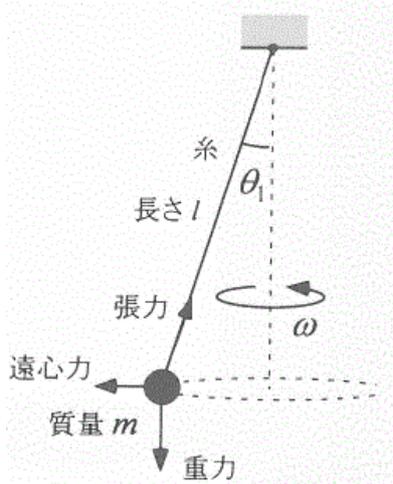
図に示すように、水平面上に半径 $r$ [m]の滑らかな円筒面がある。この円筒面は、半円から反時計回りに角度 $\theta_1$ (鋭角)の位置 D で終わっている。ただし、 $\sin\theta_1 = 0.8$ である。円筒の内面の最下点 A においた質量 $m$ [kg]の小球に、円筒の軸に垂直で水平方向右向きで速さ $v_0$ [m/s]の初速度を与える。運動は同一鉛直面内で起こり、摩擦及び空気抵抗はないものとする。重力加速度を $g$ [m/s<sup>2</sup>]として、次の問いに答えよ。



- 問 1 小球が B 点に到達した。B 点と円筒の中心 O と最高点 C のなす角を $\theta$ とする。このとき、小球が面から受ける抗力の大きさ $N$ [N]はいくらか求めよ。
- 問 2 小球が面から離れることなく点 C に到達するために必要な、A 点での最小の初速度の大きさ $V$ [m/s]はいくらか求めよ。
- 問 3 最下点 A においた小球が水平右方向で速さ $v_0$ [m/s]の初速度を与えられたとき、小球は円筒面から離れることなく点 C を通過して終端の点 D まで到達した後に、円筒面から飛び出し、水平面上の点 E に到達した。このとき、円筒面の点 D から飛び出すときの小球の速さ $v_1$ [m/s]、点 E での速さ $v_2$ [m/s]はいくらか、それぞれ求めよ。ただし解答には $v_0, g, r$ を用いよ。

【5-2】大阪府立大学前期 2013 第 1 問

糸とばねを用いた実験を行った。糸の長さをばねの自然長はいずれも  $l$  であり、ばね定数は  $k$  である。糸とばねの質量は無視でき、糸は伸びないものとする。ばねは伸縮方向に長さが変化するが、それ以外の方向にはたわまないものとする。重力加速度を  $g$ 、空気抵抗は無視できるものとして、次の問いに答えよ。



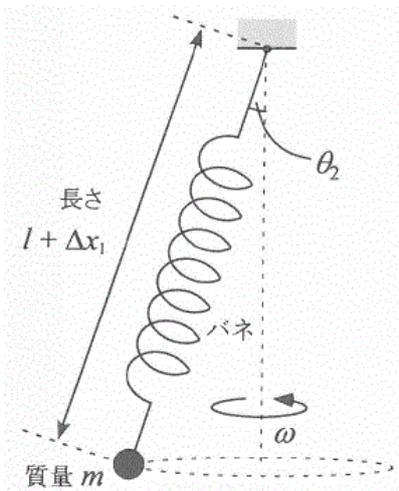
【実験 1】 問 1

左図のように、天井に固定された糸の下端に質量  $m$  の小球を水平面内で角速度  $\omega$  の等速円運動をさせた。このとき糸の傾きは鉛直方向に対して  $\theta_1$  であった。

- (1) 小球に働く遠心力、糸にかかる張力をそれぞれ求めよ。
- (2) この小球の回転周期を求めよ。

【実験 2】 問 2

次に、左図のように糸とばねを交換した。そして、そのばねの下端に取り付けた質量  $m$  の小球を水平面内で角速度  $\omega$  の等速円運動をさせた。このとき糸の傾きは鉛直方向に対して  $\theta_2$  であり、ばねは自然長から  $\Delta x_1$  だけ伸びた。



- (4)  $\Delta x_1$  の大きさ、小球の回転周期をそれぞれ求めよ。  
ただし、それらの解答には  $m, l, g, \theta_2, k$  を用いよ。
- (5)  $\theta_1$  と  $\theta_2$  の大小関係を述べよ。